

# 稀疏特征空间嵌入正则化:鲁棒的半监督学习框架

陶剑文<sup>1</sup>,姚奇富<sup>2</sup>

(1. 浙江大学宁波理工学院信息科学与工程学院,浙江宁波 315100;2. 浙江工商职业技术学院电子与信息工程学院,浙江宁波 315012)

**摘要:** 在机器学习领域,半监督学习作为一种有力工具吸引了越来越多的关注,其利用少量带标签数据和大量无标签数据进行有效学习,其中基于图的半监督学习方法因其优雅的数学形式和良好的学习性能而引起更广泛的研究.针对现有基于图的半监督学习方法所存在的模型参数敏感和数据判别信息不充分等问题,提出一种稀疏特征空间嵌入正则化(Sparse Feature Space embedding Regularization, SFSR)半监督学习框架,其主要思想为:首先分别将原始数据嵌入到线性特征空间,然后利用特征空间嵌入投影点集来稀疏重构原始数据,随后在由原始数据线性张成的标签空间通过保留这种稀疏表示关系来构建一个 Laplacian 正则化项,或称 SFSR,最后提出一个鲁棒的基于 SFSR 的半监督学习框架,在几个实际基准数据库上的综合实验结果证实了所提框架的鲁棒有效性.

**关键词:** 基于图的半监督学习;稀疏表示;最近特征空间嵌入;正则化

**中图分类号:** TP181 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2014)11-2198-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.11.011

## Sparse Feature Space Embedding Regularization: A Framework of Robust Semi-Supervised Learning

TAO Jian-wen<sup>1</sup>, YAO Qi-fu<sup>2</sup>

(1. School of Information Science and Engineering, Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo, Zhejiang 315100, China;

2. School of Information Engineering, Zhejiang Business Technology Institute, Ningbo, Zhejiang 315012, China)

**Abstract:** Semi-supervised learning (SSL), as a powerful tool to learn from a limited number of labeled data and a large number of unlabeled data, has been attracting increasing attention in machine learning community. Of various SSL methods, graph based approaches have attracted more extensive research due to their elegant mathematical formulation and good performance. However, there may exist several nontrivial concerns such as such as model parameters sensitiveness and insufficient discriminative information in data space, etc, in existing graph based SSL approaches. To these ends, in this paper, we propose a robust Sparse Feature Space embedding Regularization (SFSR) SSL framework. The main idea of the proposed SFSR includes three folds: (1) linearly embedding input data into its feature spaces (2) sparsely reconstructing input data using its feature space embedding projection images; and (3) preserving the same sparse representation relationship among labels of data as that among data in some label space spanned linearly by input data, thus constructing a novel sparse nearest feature space embedding regularizer, coined as SFSR. The comprehensive experimental results on several real-world benchmark databases are presented to demonstrate the significantly robust effectiveness of our proposed method.

**Key words:** graph based semi-supervised learning; sparse representation; nearest feature space embedding; regularization.

## 1 引言

在实际的机器学习应用中,尽管大量无标签样本很容易取得,但是用以有效学习的一定量的带标签样本通常难以提供,而手工标注这些样本往往是一件很费时费力的事情,针对该学习情景,半监督学习(Semi-Super-

vised Learning, SSL)<sup>[1]</sup>得以提出,其能充分利用大量无标签样本和少量有标签样本进行有效学习.现有 SSL 算法<sup>[2~5]</sup>均尝试利用无标签样本的概率分布的本质几何结构(或流形)来约束样本标签的推理学习,在实践中,由于我们通常不具有样本潜在流形结构的显式模型,大多数 SSL 方法均通过构建一个无向加权邻接图来近似

该流形模型,从而提出基于图的 SSL(Graph based SSL, GSSL)模型<sup>[6]</sup>.因 GSSL 所具有的实现简单和学习性能优良等优点,其已发展成为机器学习领域热门研究主题之一<sup>[1,6]</sup>.基于 GSSL 的学习模型主要包括两种学习方式,即归纳学习(inductive learning)<sup>[3,5,7]</sup>和演绎学习(transductive learning)<sup>[2,4,8]</sup>.流形正则化(Manifold Regularization, MR)<sup>[5]</sup>框架是一个典型的归纳式 SSL 模型,当忽略函数复杂度且保留流形正则化项时,MR 框架能统一许多演绎式 GSSL 方法<sup>[7]</sup>,如:Zhu 等人<sup>[4]</sup>提出的基于高斯随机场模型的 SSL 方法 GFHF;Wang 等人<sup>[8]</sup>提出的线性最近邻传播算法 LNP;Zhou<sup>[2]</sup>等人提出的局部与全局一致学习方法 LGC 等.

概念上来说,一个好的图模型应该能从局部线性关系来揭示数据点的真实本质结构(或维度),而且还能从整体上捕捉数据的某些全局结构,而传统的基于  $k$ -近邻和局部线性重构<sup>[9]</sup>的 GSSL 方法主要依赖点对间的欧式距离来构建一个由多个相互重叠的局部块构成的图模型,如此获得的图仅能捕捉数据的局部结构而不能揭示整个数据空间的全局结构;另外,传统的 GSSL 方法在图的边权值计算上采取的是统一的全局参数,使得这些方法不能获得数据适应邻居集;最后,这些传统方法在利用标签信息时对局部噪声信息和误差数据非常敏感,可直接导致标签信息的错误传播<sup>[8]</sup>.对此,Wright 等人<sup>[10]</sup>归纳出一个信息图所应该具备的三个特征,即:高判别力,低稀疏性以及邻居自适应性.受此思想启发,Cheng 等人<sup>[11]</sup>提出通过稀疏表示(Sparse Representation, SR)<sup>[10]</sup>来构建一个  $l_1$ -图,该图的邻居关系和边权值可通过求解一个无参的  $l_1$ -范优化问题同时获得.与传统方法不同, $l_1$ -图探究了多个数据点间的更高阶关系,因而更具判别力和鲁棒性.得益于 SR 的本质优势, $l_1$ -图具备了稀疏性、邻居自适应性和对噪声数据的鲁棒性,因此,近年来,一些基于 SR 的  $l_1$ -图及其衍生的图模型被先后提出,如 Yan 等人<sup>[12]</sup>提出的稀疏表示 SSL;Fan 等人<sup>[13]</sup>提出的鲁棒稀疏正则化 SSL 算法 S-RLSC;Cheng 等人<sup>[14]</sup>提出的基于稀疏相似性度量的标签传播算法 SIS 等.

在基于鲁棒的  $l_1$ -图的 SSL 模型构建中,我们敏锐地注意到某些小样本学习场景缺少判别信息的问题,如在人脸图像识别等小样本学习中,由于学习数据集中心点对间的相似性判别信息有限<sup>[15]</sup>,从而可能在一定程度上导致 GSSL 方法面临判别信息不充分的问题.对此,近来 Chen 等人<sup>[15]</sup>提出一种名为最近特征空间嵌入(Nearest Feature Space embedding, NFS)的方法,其通过将样本嵌入到  $k$ -近邻特征空间来扩大其有限的判别信息空间,从而提升样本嵌入空间的模式判别力. NFS 采用

点对间的欧式距离来判别样本与特征空间嵌入点间的  $k$ -近邻关系,且在样本的低维嵌入目标函数中样本间相似权值计算也采用统一参数模型,换言之, NFS 依然存在与传统 GSSL 模型构建中相似的弊端.因此,如何在基于鲁棒的  $l_1$ -图的 SSL 模型中提升样本的判别信息空间是一个亟待解决的重要问题,为此,受 NFS 方法思想和稀疏表示理论的启发,提出一种新颖的基于稀疏特征空间嵌入的相似性度量技术,其通过特征空间嵌入实现数据点的稀疏重构,以反映原始数据点与特征空间嵌入点间的本质相似性结构,然后在数据线性映射的标签空间保留这种相似性结构<sup>[16]</sup>,从而构建一种稀疏特征空间嵌入正则化(Sparse Feature Space embedding Regularization, SFSR)函数,最后提出一种归纳式的基于 SFSR 的 SSL 一般框架.

## 2 稀疏特征空间嵌入正则化

稀疏特征空间嵌入正则化(Sparse Feature Space embedding Regularization, SFSR)学习主要包括:(1)原始空间数据在特征空间的嵌入学习,获得各原始数据点在特征空间的相应投影点集;(2)利用特征空间投影点集稀疏重构各原始数据,获得稀疏重构矩阵  $\mathbf{S}$ ,并以此构建加权图模型  $G(\mathbf{X}, \mathbf{S})$ ,其中  $\mathbf{X}$  为训练数据集矩阵,  $\mathbf{S}$  为图边权值矩阵;(3)基于图模型  $\mathbf{G}$  计算稀疏特征空间嵌入 Laplacian 矩阵,从而构建 SFSR.

### 2.1 特征空间嵌入计算

考虑原始空间的对象集  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ ,给定对象  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$  到特征空间的距离为:

$$\|\mathbf{x}_i - f^{(P)}(\mathbf{x}_i)\|^2 \quad (1)$$

其中  $f^{(P)}$  为  $P(P=1, 2, \dots, N-1)$  个对象生成的特征空间,  $f^{(P)}(\mathbf{x}_i)$  为对象  $\mathbf{x}_i$  在特征空间  $f^{(P)}$  的嵌入(或投影).当  $P=1$  时,式(1)表示点对间的距离度量,对象  $\mathbf{x}_i$  在特征空间的嵌入为原始空间对象集.根据文献[15]推导,对象  $\mathbf{x}_i$  在特征空间  $f^{(P)}$  的嵌入  $f^{(P)}(\mathbf{x}_i)$  可由下式计算获得.

$$f^{(P)}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{\Gamma}_{1:P}(\mathbf{\Gamma}_{1:P}^T \mathbf{\Gamma}_{1:P})^{-1} \mathbf{\Gamma}_{1:P}^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) + \mathbf{x}_1 = \sum_{j=1}^P \lambda_j \mathbf{x}_j \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{\Gamma}_{1:P} = [\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1 \quad \dots \quad \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_1]$ ,  $\sum_{j=1}^P \lambda_j = 1$ .

### 2.2 稀疏特征空间嵌入图构造

设  $T^{(P)}$  为对象集  $\mathbf{X}$  生成的  $C_p^{N-1}$  个可能的特征空间集,  $T^{(P)}(\mathbf{x}_i)$  为对象  $\mathbf{x}_i$  在特征空间集  $T^{(P)}$  中投影点集.本文试图避开传统的 GSSL 方法中所采用的点对间关系度量方法,而采用特征空间投影点集  $T^{(P)}(\mathbf{x}_i)$  来稀疏表示原始空间对象  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$ ,从而构建一个加权图  $G =$

$\{T^{(P)}, \mathbf{S}^{(P)}\}$ , 其中  $\mathbf{S}^{(P)} = (s_{ij}^{(P)})_{i=1}^N$  为稀疏表示系数矩阵,  $s_{ij}^{(P)}$  代表对象  $\mathbf{x}_i$  和第  $j$  个特征空间嵌入  $f^{(P)}(\mathbf{x}_i) \in T^{(P)}(\mathbf{x}_i)$  间的稀疏表示权值, 即通过求解如下  $l_1$ -范最小化问题来为各数据点  $\mathbf{x}_i$  寻求一个稀疏重构权值向量  $\mathbf{s}_i^{(P)}$ :

$$\min \|\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_i^{(P)} T^{(P)}(\mathbf{x}_i)\|^2 + C \|\mathbf{s}_i^{(P)}\|_1 \quad (3)$$

其中,  $C$  为正则化参数, 以控制重构稀疏性和重构补偿间的平衡,  $\mathbf{s}_i^{(P)} = [s_{i1}^{(P)}, s_{i2}^{(P)}, \dots, s_{i(j-1)}^{(P)}, 0, s_{i(j+1)}^{(P)}, \dots, s_{iC}^{(P)}]^\top$  是一个  $C_P^{N-1}$ -维列向量, 其中第  $j$  个元素等于 0 表示特征空间投影点  $\tilde{\mathbf{x}}_j \in T^{(P)}(\mathbf{x}_i)$  从  $T^{(P)}(\mathbf{x}_i)$  中移除,  $s_{ij}^{(P)} (i \neq j)$  表示  $\tilde{\mathbf{x}}_j$  对  $\mathbf{x}_i$  的重构贡献度. 本文进一步约束  $\sum_j s_{ij}^{(P)} = 1$ , 且  $s_{ij}^{(P)} \geq 0$ . 特别地, 当  $P=2$  和  $P=3$  时, 式(3)分别变为:

$$\min \|\mathbf{x}_i - \sum_{i \neq a \neq b} s_{a,b}^{(2)}(\mathbf{x}_i) f_{a,b}^{(2)}(\mathbf{x}_i)\|^2 + C \|\mathbf{s}_i^{(2)}\|_1 \quad (4)$$

$$\min \|\mathbf{x}_i - \sum_{i \neq r \neq a \neq b} s_{r,a,b}^{(3)}(\mathbf{x}_i) f_{r,a,b}^{(3)}(\mathbf{x}_i)\|^2 + C \|\mathbf{s}_i^{(3)}\|_1 \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{s}_i^{(2)}$  和  $\mathbf{s}_i^{(3)}$  分别为由稀疏权值  $s_{a,b}^{(2)}(\mathbf{x}_i)$  和  $s_{r,a,b}^{(3)}(\mathbf{x}_i)$  构成的  $C_2^{N-1}$  维和  $C_3^{N-1}$  维列向量. 可以通过扩展特征-符号搜索法<sup>[17]</sup>来求解式(3)中稀疏编码问题. 在求得所有数据点的优化重构稀疏向量  $\mathbf{s}_i^{(P)} (1 \leq i \leq N)$  后, 便可构建稀疏权值矩阵  $\mathbf{S} = [s_1^{(P)}, s_2^{(P)}, \dots, s_N^{(P)}]$ .

### 2.3 稀疏特征空间嵌入正则化

设有  $c$  个分类, 令  $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_c) \in \mathbb{R}^{N \times c}$  为类指示矩阵, 其中  $f_j = [f_j(x_1), f_j(x_2), \dots, f_j(x_N)]^\top (1 \leq j \leq c)$ . 根据上文描述, 稀疏权值矩阵  $\mathbf{S}$  在一定程度上能反映数据与特征空间嵌入点间的本质几何特性且包含了数据的自然判别信息, 为此, 本文假设: 与特征空间相应的标签空间具有和原始特征空间相似的几何特性, 即原始输入数据的真实类标签也能被标签空间嵌入稀疏表示, 即可构建如下最小化目标函数来保留特征空间嵌入的稀疏表示特性:

$$F_1 = \sum_i \left\| \sum_{j: L^{(P)} \in F^{(P)}} (f_i - L^{(P)}(f_j)) s_j^{(P)}(\mathbf{x}_i) \right\|^2 \quad (6)$$

$$F_2 = \sum_i \sum_{j: L^{(P)} \in F^{(P)}} \|f_i - L^{(P)}(f_j)\|^2 s_j^{(P)}(\mathbf{x}_i) \quad (7)$$

其中,  $s_j^{(P)}(\mathbf{x}_i)$  为第  $j$  个特征空间嵌入稀疏表示权值,  $L^{(P)}$  为  $P$  个标签对象生成的标签空间,  $L^{(P)}(f_i)$  为对象  $f_i$  在特征空间  $L^{(P)}$  的投影,  $F^{(P)}$  为标签集生成的  $C_P^{N-1}$  个可能的标签空间集.

**定理 1** 目标函数(6)和(7)可分别表示为 Laplacian 正则化形式, 即  $F_i = \text{tr}(\mathbf{F} \mathbf{L}_s \mathbf{F}^\top) (i=1, 2)$ , 其中  $\mathbf{L}_s$  为 Laplacian 矩阵.

证明: 定理 1 可仿照文献[15]推导证明, 空间所限,

在此省略.

根据定理 1,  $\mathbf{L}_s$  为稀疏特征空间嵌入 Laplacian 矩阵, 则  $F_i = \text{tr}(\mathbf{F} \mathbf{L}_s \mathbf{F}^\top) (i=1, 2)$  称为稀疏特征空间嵌入 Laplacian 正则化函数, 统一表示为  $J(\mathbf{F})_{\text{SFSR}} = \text{tr}(\mathbf{F} \mathbf{L}_s \mathbf{F}^\top)$ .

## 3 SFSR 半监督学习方法

### 3.1 问题描述

给定数据集  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_l, \mathbf{x}_{l+1}, \dots, \mathbf{x}_{l+u}\} \in \mathbb{R}^d$  ( $d$  为数据维数) 和标签集  $L = \{1, 2, \dots, c\}$ , 其中前  $l$  个点  $\mathbf{x}_i (1 \leq i \leq l)$  标签为  $y_i \in L$ , 余下的  $u$  个数据点  $\mathbf{x}_j (l+1 \leq j \leq l+u = N)$  无标签, 每个数据点  $\mathbf{x}_i$  均来自某个固定但未知的分布  $p(\mathbf{x})$ . 令  $\mathbf{F} = (f^1, f^2, \dots, f^c) \in \mathbb{R}^{N \times c}$  为类预测标签矩阵,  $f^j = [f^j(\mathbf{x}_1), f^j(\mathbf{x}_2), \dots, f^j(\mathbf{x}_N)]^\top$  为  $c$  个优化的分类函数 ( $1 \leq j \leq c$ ),  $\mathbf{1}_N \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  表示全 1 向量,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times c}$  为类标签矩阵, 且若  $\mathbf{x}_i$  被标识为  $y_i = j$ , 则  $Y_{ij} = 1$ , 否则  $Y_{ij} = 0$ .

本文综合演绎学习推理速度快和归纳学习泛化性能强的优点, 提出一种 SFSR 半监督学习框架模型, 旨在同时学习数据的预测标签矩阵  $\mathbf{F}$  和 Out-of-Sample 推理函数  $H(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^\top \mathbf{W} + \mathbf{1}_N \mathbf{b}^\top$  ( $\mathbf{W}, \mathbf{b}$  为函数参数)<sup>[7]</sup>, 且使得  $\mathbf{F}$  和  $H(\mathbf{X})$  之间的误差  $\|\mathbf{F} - H(\mathbf{X})\|^2$  最小化. SFSR 框架满足: (1) 预测矩阵  $\mathbf{F}$  与稀疏图中带标签顶点的标签值一致; (2) 预测矩阵  $\mathbf{F}$  在整个稀疏图上平滑变动; (3) 能通过  $H(\mathbf{X})$  来有效推理 Out-of-Sample 标签.

### 3.2 SFSR 半监督学习框架

SFSR 半监督学习框架定义为:

$$Q_{\text{SFSR}}(\mathbf{F}, \mathbf{W}, \mathbf{b}) =$$

$$\min_{\mathbf{F}, \mathbf{W}, \mathbf{b}} J_{\text{SFSR}}(\mathbf{F}) + \text{tr}((\mathbf{F} - \mathbf{Y})^\top \mathbf{U} (\mathbf{F} - \mathbf{Y})) + \gamma_d (\|\mathbf{W}\|^2 + \gamma_a \text{Loss}(H(\mathbf{X}), \mathbf{F})) \quad (8)$$

其中,  $\gamma_d, \gamma_a \geq 0$ ; 令  $u_l$  为一较大的常数,  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  为对角矩阵, 其前  $l$  个对角元素  $u_{ii} = u_l > 0 (1 \leq i \leq l)$ , 余下对角元素  $u_{ii} = 0 (l+1 \leq i \leq l+u = N)$ . 式(8)等号右边第一项称为稀疏平滑项, 其描述了相对于稀疏重构结构的数据标签的总体变化, 其中第二项称为拟合项, 第三项为正则化损失项, 其中  $\text{Loss}(\cdot)$  为某个损失函数, 如: 最小平方损失函数, Hing 损失函数等, 基于最小平方损失函数的简单性和可比较的学习性能<sup>[18]</sup>, 本文采用最小平方损失函数, 从而式(8)可被重新表示为:

$$Q_{\text{SFSR}}(\mathbf{F}, \mathbf{W}, \mathbf{b}) =$$

$$\min_{\mathbf{F}, \mathbf{W}, \mathbf{b}} \text{tr}(\mathbf{F}^\top \mathbf{L}_s \mathbf{F}) + \text{tr}((\mathbf{F} - \mathbf{Y})^\top \mathbf{U} (\mathbf{F} - \mathbf{Y})) + \gamma_d (\|\mathbf{W}\|^2 + \gamma_a \|\mathbf{X}^\top \mathbf{W} + \mathbf{1}_N \mathbf{b}^\top - \mathbf{F}\|^2) \quad (9)$$

**定理 2**<sup>[7]</sup> 对于矩阵  $\mathbf{U}, \mathbf{L}_s \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{F}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{N \times c}$ ,  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{d \times c}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{c \times 1}$ , 如果  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{L}_s$  为半正定矩阵, 则目

标  $Q_{SFSR}(\mathbf{F}, \mathbf{W}, \mathbf{b})$  为相对于变量  $\mathbf{F}, \mathbf{W}, \mathbf{b}$  的联合凸优化函数.

根据定理 2, 按照文献[7]相同推导分别可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \gamma_a (\gamma_a \mathbf{X} \mathbf{H}_c \mathbf{X}^T + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X} \mathbf{H}_c \mathbf{F} = \mathbf{D} \mathbf{F} \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{N} (\mathbf{F}^T \mathbf{1}_N - \mathbf{W}^T \mathbf{X} \mathbf{1}_N) \end{aligned} \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{H}_c = \mathbf{I}_c - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T$  为数据中心化矩阵,  $\mathbf{D} = \gamma_a (\gamma_a \mathbf{X} \mathbf{H}_c \mathbf{X}^T + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X} \mathbf{H}_c$ , 从而可得:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{W} + \mathbf{1}_N \mathbf{b}^T = \mathbf{H}_c \mathbf{X}^T \mathbf{D} \mathbf{F} + \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{F} \quad (11)$$

其中,  $\mathbf{V} = \mathbf{H}_c \mathbf{X}^T \mathbf{D} + \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T$ . 将  $\mathbf{W}, \mathbf{b}$  代入式(9), 对目标函数  $Q_{SFSR}(\mathbf{F}, \mathbf{W}, \mathbf{b})$  按照  $\mathbf{F}$  求偏导数并令其等于 0 可得预测标签矩阵  $\mathbf{F}$  为:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{U} + \mathbf{L}_s + \gamma_d \gamma_a (\mathbf{V} - \mathbf{I})^T (\mathbf{V} - \mathbf{I}) + \gamma_d \mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{U} \mathbf{Y} \quad (12)$$

将  $\mathbf{F}$  代回式(10)可求得  $\mathbf{W}, \mathbf{b}$ , 从而, 对于 Out-of-Sample 的测试数据集矩阵  $\mathbf{X}_u$ , SFSR 的推理函数为:

$$H(\mathbf{X}_u) = \mathbf{X}_u^T \mathbf{W} + \mathbf{1} \mathbf{b}^T \quad (13)$$

### 3.3 讨论:方法比较

SFSR 一般框架在形式上与 FME<sup>[7]</sup> 模型是一致的, 二者主要在 Laplacian 正则化项的构建方式(或 Laplacian 图的构建)上存在本质差异, 从而决定了 FME 模型可能存在的几个重要问题:(1)模型构建的鲁棒性问题. 虽然在流形数据学习上采取了不同的处理方式<sup>[7]</sup>, 但是其采用  $k$ -近邻图来构建图 Laplacian 正则化项, 这意味着它在模型构建上仍存在某些难以解决的问题(如近邻参数的选取和图权值计算的核参数选取等问题); (2)流形假设问题. FME 和其他现有的 GSSL 方法一样均基于流形假设, 但是该假设在高维数据空间并非总能成立, 当高维数据不具有明显的低维数据流形结构时, 这类方法将存在学习性能上的明显局限性; (3)判别信息有限问题. 当数据空间判别信息有限时, FME 可能在一定程度上不能取得最优效能. 而这些问题均有望在 SFSR 模型中得以解决. 另外, 最近提出的几个基于稀疏表示的学习方法(如文献[12~14])虽然在 Laplacian 图模型的构建思路与本文方法一致, 但是在具体的学习框架上本文方法具有明显的一般性, 且在 SFSR 中 Laplacian 图模型的构建是基于数据的特征空间嵌入投影集, 这将有望在一定程度上能增强数据的判别信息空间, 从而可提升所提方法的学习性能.

## 4 实验分析

本部分文将在几个实际数据集上进行实验, 以验证所提方法 SFSR 在 SSL 问题上的鲁棒有效性. 选取具

有代表性的几个 GSSL 方法进行算法比较, 这些算法包括: LGC<sup>[2]</sup>, GFHF<sup>[4]</sup>, FME<sup>[7]</sup>, LapRLS<sup>[5]</sup>, 稀疏正则化 SSL 方法 S-RLSC<sup>[13]</sup>, 线性邻居传播方法 LNP(Linear Neighbor Propagation)<sup>[8]</sup>, 以及基线方法 1-近邻分类算法 1-NN<sup>[19]</sup>. 对于所有算法实验, 分别记录 10 次独立实验结果的平均值用于算法性能评价.

对于 LGC, GFHF 和 LapRLS 方法, Laplacian 图矩阵采用 Gaussian 函数构建, 其中 Gaussian 函数参数采取 5-重交叉验证法来设置, 在 GFHF 方法中的 Laplacian 图矩阵的对角元素设为零; 在 LapRLS 和 S-RLSC 方法中, 为了算法比较的公平起见, 正则化参数  $\gamma_a$  和  $\gamma_l$  设置与文献[13]中相同, 核函数选择为 RBF 核, 核带宽设置为  $\sigma = 0.5$ ; 在 LNP 方法中, 最近邻参数  $k$  手工设置为 7, 正则参数手工设置为  $\alpha = 0.9$ ; 在所提方法中, 模型参数  $\gamma_d$  和  $\gamma_a$  的设置分别与 FME 中参数  $\mu$  和  $\gamma$  相同, 文献[15]指出, 没有证据显示  $P \geq 3$  时的 NFS 方法性能优于  $P = 2$  时的识别效果, 因此, 为计算简单起见, 本文设置参数  $P$  为  $P = 2$ .

### 4.1 人脸识别实验

本部分将在 4 个实际人脸图像数据集上验证所提方法的鲁棒有效性. 4 个人脸识别数据集包括 YALE B, CMU PIE, ORL 和 YALE\*, 详细信息可参考文献[20]. 对于各人脸图像数据集  $X$ , 随机选取  $m$  个数据样本作为标签化训练数据, 对于 1-NN 算法, 训练集仅包含 1 个标签数据. 对于 LGC, GFHF, FME, LapRLS, S-RLSC, FME 和 SFSR 方法, 训练集包含数据集  $X$  中所有带标签和无标签数据.

图 1(a)~(d) 分别显示了所提方法在四个人脸数据集上的识别性能比较结果, 其中水平轴表示每个对象随机标注的人脸图像数, 垂直轴代表所有算法的相应的识别精度. 从图 1 显示结果可看出, 所提方法 SFSR 在所有四个人脸数据集上的识别性能均优于其他方法, 其中, 随着随机标注的人脸样本数增加, SFSR、S-RLSC、FME 和 LNP 三种方法具有可比较的识别性能, 其中三个采用重构方法构建 Laplacian 正则项的方法(如 SFSR 和 S-RLSC 采用稀疏重构, LNP 采用  $k$ -近邻重构)识别性能略胜于基于流形学习的方法 FME.

为了进一步评价所提方法在人脸识别上的鲁棒性, 本文从 YALE 和 ORL 数据库中分别对每个对象随机选取 8 幅图像作为训练数据集, 并在图像样本中逐渐增加高斯白噪声百分比, 以逐渐减小信噪比(signal-to-noise ratio, SNR). 图 2 显示了处理后数据集的实验结果, 其中

\* 四个数据集均可从网址 <http://www.cad.zju.edu.cn/home/deng-cai/Data/FaceData.html> 下载.

水平轴表示数据集中干扰信号的能量变化,垂直轴表示人脸识别精确率.由图 2 可看出,在样本数据集包含噪声信息的情况下,本文方法 SFSR 在绝大多数情况下均能取得最好的识别性能,这显示基于稀疏近似最近特征空间嵌入相似度的 SFSR 算法是有效的.另外,

随着噪声信息的增加,所有算法的识别性能均表现出了不同程度的下降趋势,而本文所提方法 SFSR 和 S-SRLC 性能下降相对缓慢,这也进一步说明了基于稀疏重构技术的图像识别方法对于噪声或缺失数据具有更强的鲁棒性.

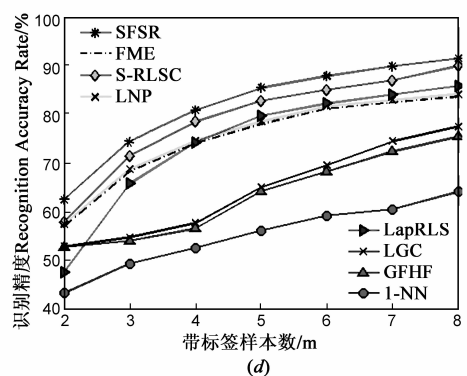
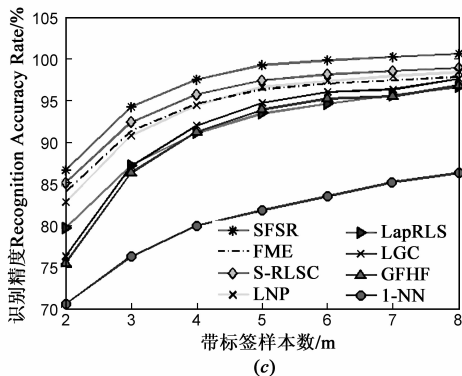
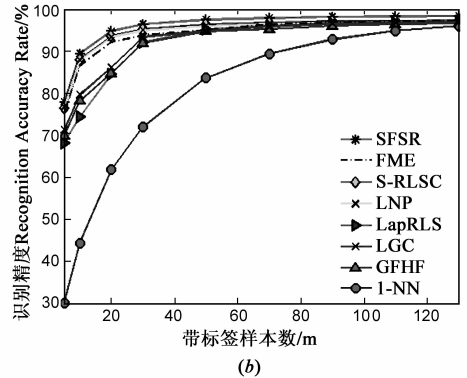
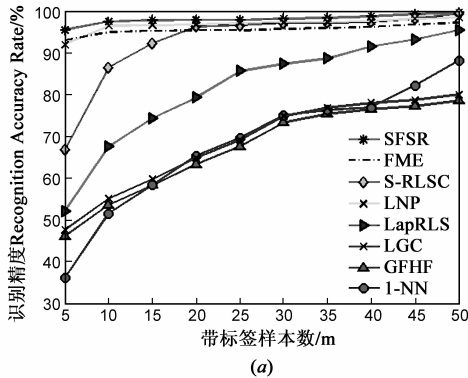


图 1 分别在(a)YALE B;(b)PIE;(c)ORL和(d)YALE上的人脸识别结果

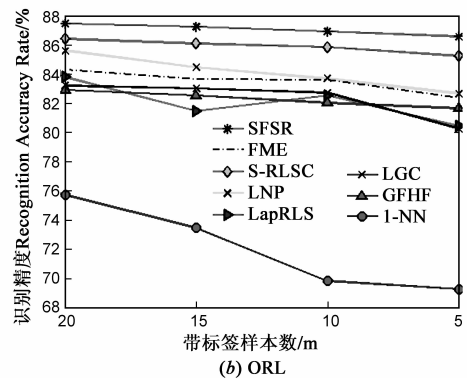
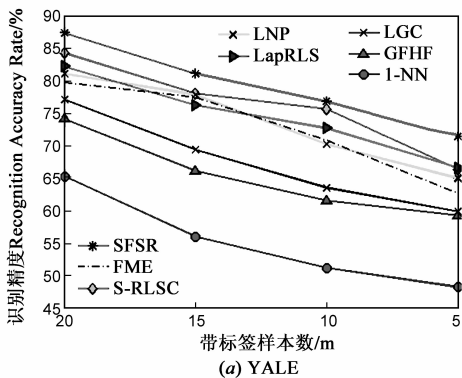


图 2 在具有不同能量等级噪声的人脸数据集上的平均识别精度率(%)

### 4.2 手写数字识别实验

本实验将进一步评价所提方法在 USPS 数据集 (<http://www.kernel-machines.org/data.html>)上的分类性能,该数据集包含 10 类大小为  $16 \times 16$  的手写数字图像,本实验从该数据集中分别选取数字 1,2,3,4 的前 200 幅图像作为训练集,随后的 200 幅图像作为测试图像集.实验中,记录 10 次独立实验结果的平均值作为各算法的识别精度率,图 3(a)描绘了所提方法与其他方

法的性能比较,其显示结果可明显看出所提方法的性能优势,随着随机标注样本的增加,FME、LapRLS、LNP 和 S-RLSC 四种方法具有可比较的稳定的识别性能.值得指出的是,随着随机标注样本的增加,所提方法 SFSR 的识别性能非常稳定,换句话说,即使在标签样本较少的情况下,所提方法仍能取得较高的识别性能,可能的原因在于:一方面,不同类数字的图像数据处于各自的子流形结构,即同类数字的图像数据处于相同的子流

形结构,而基于特征空间嵌入稀疏重构技术的 SFSR 方法能有效揭示不同类数字的子流形结构,使得只需较少量的标签样本即可预测无标签样本标签;另一方面,

由于采用了特征空间嵌入技术,在一定程度上充实了数据空间的判别信息,从而只需少量标签数据便可判别测试数据。

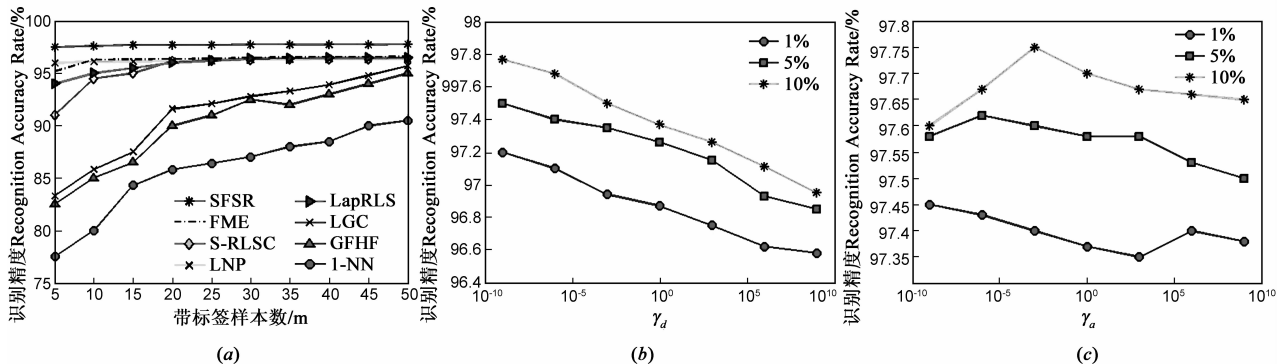


图3 USPS数字识别实验:(a)所有算法识别精度;(b)参数 $\gamma_d$ 敏感性;(c)参数 $\gamma_a$ 敏感性

图3(b)、(c)显示了参数 $\gamma_d$ 和 $\gamma_a$ 变化对SFSR算法性能的影响,其中水平轴表示参数的变化区间,垂直轴表示SFSR的相应识别精度,不同的曲线代表不同的标签样本数,如5%的曲线代表SFSR在标签样本数占总训练样本数的5%的情况下的不同识别精度.根据SFSR框架定义,正则参数 $\gamma_d$ 起到平衡预测损失和平滑性的作用,从图3(b)可知,当参数 $\gamma_d$ 取较小值(如 $\gamma_d \leq 10^{-6}$ )时,SFSR能取得相对鲁棒的学习性能,且在其他数据集上实验也能发现同样的结论,由此说明在SFSR框架中对稀疏特征空间嵌入正则项和标签拟合项的平衡调节是非常重要的.另外,从图3(c)可观察到参数 $\gamma_a$ 也具有和 $\gamma_d$ 相似的特性,即在取相对较小 $\gamma_a$ 值的情况下,SFSR能取得相对较优性能,这说明减小预测标签矩阵 $F$ 和归纳函数 $H(X)$ 间的不匹配性在一定程度上能改善算法学习性能。

## 5 结束语

针对现有的基于图的SSL方法存在的问题,受稀疏表示理论和最近特征空间嵌入方法等思想启发,提出一种新颖的稀疏特征空间嵌入正则化目标函数,能使所预测的数据标签具有充分的平滑性和鲁棒性.基于所提正则化目标函数,构造了一种鲁棒的SSL框架,并在实际数据集上进行了实验验证,实验结果证实了所提框架模型的鲁棒有效性。

## 参考文献

[1] Zhu Xiao jin. Semi-supervised learning literature survey[R]. Computer Science TR 1530, USA, University of Wisconsin: Department of Computer Sciences, 2008.  
 [2] D Zhou, O Bousquet, T Lal, J Weston, B Schölkopf. Learning with local and global consistency[A]. Proc of Advances in Neural Information Processing Systems(NIPS'03)[C]. Van-

couver: Curran Associates Inc, 2003. 321 - 328.

[3] 皋军,王士同,邓赵红.基于全局和局部保持的半监督支持向量机[J].电子学报,2010,38(7):1626 - 1633.  
 Gao Jun, Wang Shi-tong, Deng Zhao-hong. Global and local preserving based semi-supervised support vector machine[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(7): 1626 - 1633. (in Chinese)  
 [4] X Zhu, Z Ghahramani, J Lafferty. Semi-supervised learning using Gaussian fields and harmonic functions[A]. Proc 20th Int. Conf. on Machine Learning[C]. California: AAAI Press, 2003. 912 - 919.  
 [5] M Belkin, P Niyogi, V Sindhwani. Manifold regularization: A geometric framework for learning from examples[J]. Journal of Machine Learning Research, 2006, 7: 2399 - 2434.  
 [6] Wei Liu, Jun Wang, Shih-Fu Chang. Robust and scalable graph-based semi-supervised learning[J]. Proceedings of the IEEE, 2012, 100(9): 2624 - 2638.  
 [7] Nie F, Xu D, Tsang I, Zhang C. Flexible manifold embedding: A framework for semi-supervised and unsupervised dimension reduction[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(7): 1921 - 1932.  
 [8] F Wang, C Zhang. Label propagation through linear neighborhoods[J]. IEEE Trans on Knowledge and Data Engineering, 2008, 20(1): 55 - 67.  
 [9] S T Roweis, L K Saul. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding[J]. Science, 2000, 290: 2323 - 2326.  
 [10] J Wright, Y Ma, J Mairal, G Sapiro, T Huang, S Yan. Sparse representation for computer vision and pattern recognition[J]. Proceedings of IEEE, Special Issue on Applications of Compressive Sensing & Sparse Representation, 2010, 98(6): 1031-1044.  
 [11] Bin Cheng, Jianchao Yang, Shuicheng Yan, Yun Fu, Thomas S. Huang. Learning with l1-graph for image analysis[J]. IEEE Trans Image Process, 2010, 19(4): 858 - 66.

- [12] Shuicheng Yan, Huan Wang. Semi-supervised learning by sparse representation [A]. Proceedings of SIAM on Data Mining [C]. Sparks: SIAM Press, 2009. 792 – 801.
- [13] M Fan, N Gu, H. Qiao, B Zhang. Sparse regularization for semi-supervised classification [J]. Pattern Recognition, 2011, 44 (8): 1777 – 1784.
- [14] Hong Cheng, Zicheng Liu, Jie Yang. Sparsity induced similarity measure for label propagation [A]. IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV) [C]. Kyoto: IEEE Press, 2009. 317 – 324.
- [15] Ying-Nong Chen, Chin-Chuan Han, Cheng-Tzu Wang, et al. Facerecognition using nearest feature space embedding [J]. IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2011, 33(6): 1073 – 1086.
- [16] L Qiao, S Chen, X Tan. Sparsity preserving projections with applications to face recognition [J]. Pattern Recognition, 2010, 43(1): 331 – 341.
- [17] M Zheng, J Bu, C Chen, C Wang, L Zhang, G Qiu, D. Cai. Graph regularized sparse coding for image representation [J]. IEEE Trans. on Image Processing, 2011, 20(5): 1327 – 1336.
- [18] 万建武, 杨明, 陈银娟. 代价敏感的半监督 Laplacian 支持向量机 [J]. 电子学报, 2012, 40(7): 1410 – 1415.  
Wan Jian-wu, Yang Ming, Chen Yin-juan. Cost sensitive semi-supervised Laplacian support vector machine [J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(7): 1410 – 1415. (in Chinese)
- [19] Terence Sim, Simon Baker, Maan Bsat. The CMUpose, Illumination and expression database [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2003, 25(12): 1615 – 1618.
- [20] Deng Cai, Xiaofei He, Jiawei Han, Hong-Jiang Zhang. Orthogonal Laplacianfaces for face recognition [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(11): 3608 – 3614.

### 作者简介



**陶剑文** 男, 1973 年生于湖北武汉. 浙江大学宁波理工学院信息科学与工程学院教授, 博士, 主要研究方向为机器学习, 模式识别, 数据挖掘等.

E-mail: jianwen-tao@aliyun.com



**姚奇富** 男, 1965 年生于浙江余姚. 浙江工商职业技术学院电子与信息工程学院教授, 研究方向为数据挖掘与知识发现.